UNIDAD III - LÓGICA SIMBÓLICA

<u>CÁLCULO PROPOSICIONAL:</u>

El desarrollo de la Lógica proposicional (tipo de lógica simbólica) se da por insuficiencias o limitaciones de la lógica clásica. Recordemos que la Lógica clásica (lógica aristotélica) toma a las proposiciones universales como proposiciones que no implican un compromiso existencial. Por lo tanto cuando decimos "Los monos son ratones gordos", que puede ser expresado bajo la forma *S es P* no me comprometo con que existan ni los monos ni los ratones gordos. En cambio cuando digo que Algún mono es un ratón gordo, me comprometo con la creencia en la existencia de al menos un individuo que sea mono y que también sea una ratón gordo. Este abordaje se preocupa por la relación entre las clases que integran los enunciados, independiente de la verdad o falsesd de sus componentes.

La lógica proposicional, por su parte, se concentra en el análisis de las proposiciones de los argumentos y las relaciones que existen entre ellas. Este análisis se conoce como *veritativo funcional* pues el valor de verdad de los argumentos depende ahora del valor de verdad de sus enunciados y de la forma en que estos se conectan, que ya no es de la forma dada por la tercera persona del indicativo del verbo ser, como usaba el esquema aristotélico. Dicho de otra manera la lógica proposicional estudia las relaciones entre las proposiciones sin analizar, sin tener en cuenta la estructura interna de las mismas.

Es en el siglo XX, recién, cuando la lógica conoce un desarrollo enorme a partir del cálculo proposicional. En verdad, si bien el interés inicial de la lógica fue el análisis de los argumentos concretos el desarrollo enorme que tuvo esa disciplina hizo que se fuera alejando de ese interés primero y se centrara luego en las propias estructuras, independientemente de si servían al análisis argumental o no. Algo parecido puede pensarse en el desarrollo de la matemática que comenzara como matemática aplicada y, sin dejar ese costado, desarrollara fuertemente lo que se conoce como matemática pura, es decir, una matemática cuyo valor de estudio y desarrollo no es directamente su aplicación, sino el estudio de las *verdades matemáticas*. Algo similar pasó con la lógica que empezó como lógica aplicada y desarrolló enormemente lo que podemos llamar lógica pura.

El cálculo proposicional (la lógica proposicional) forma sólo una parte de la lógica simbólica. Pero su funcionamiento es lo suficientemente importante y fundamental como para centrarnos en ella afin de comprender algunos procedimientos básicos de la lógica simbólica.

Lenguaje del Cálculo Proposicional:

Como ya dijimos anteriormente la lógica es un lenguaje formal, y como tal está constituido por un conjunto de signos y reglas característico: signos del lenguaje (tabla de símbolos), reglas sintácticas (reglas para la construcción de expresiones del lenguaje) y reglas semánticas (reglas que nos permiten encontrar un *valor de verdad* para las expresiones del lenguaje a partir de los *valores de verdad* de sus componentes)

La lógica proposicional permite la realización de cálculos, para lo cual traduce el lenguaje ordinario a fórmulas lógicas, transforma tales fórmulas en otras, es decir deduce unas de otras.

Los valores de verdad que usará la el cálculo proposicional serán solamente el de ***verdad (o verdadero)*** simbolizado por una "v" y el de ***falsedad (o falso)*** simbolizado por una "f".

Cuando hablamos de cálculo nos estamos refiriendo a un *sistema de relaciones entre símbolos no interpretados que permite realizar operaciones con ellos.*

El lenguaje del cálculo proposicional recibirá el nombre de *Lenguaje L.*

Signos del lenguaje:

Cuando hablamos de símbolos formales en el contexto del cálculo proposicional (a veces llamados signos elementales) nos referimos a tres tipos de signos:

1. **Variables proposicionales o letras enunciativas:** son letras que simbolizan proposiciones atómicas (proposiciones que no contienen conectivos binarios, las que los contienen reciben el nombre de proposiciones moleculares). Se llaman variables porque cada una de ellas puede representar de forma indistinta cualquier proposición. Dichas

letras se utilizan en minúscula y en orden alfabético, vale recordar que por una convención en la literatura lógica se utiliza a partir de la **p**. (p, q, r, s, t...)

2. **Operadores o constantes lógicas:** son símbolos que sirven para relacionar las proposiciones entre sí. Se los conoce con el nombre de conectivas. El conjunto de los conectivos es un conjunto finito. Se considerarán conectivos del calculo proposicional a los siguientes símbolos:

$\rightarrow$	(Condicional)	Conectivos Binarios
$\leftrightarrow$	(Bicondicional)	
$\wedge$	(Conjunción)	
v	(Disyunción)	
$\neg$	(Negación)	Conectivo unario

3. **Símbolos auxiliares:** son símbolos que sirven para indicar como se agrupan los componentes de una fórmula y cuál es la conectiva principal o dominante. Estos signos auxiliares serán los paréntesis (,). Podría usarse una gama más amplia de signos (corchetes, etc.), pero no resulta imprescindible.

Reglas sintácticas:

La misión del conjunto de estas *reglas de formación* es establecer la combinación correcta de signos elementales brindando una adecuada noción de *expresión bien formada* o *formula bien formada* del cálculo proposicional. De esta manera tenemos un test que nos permite decidir ante una cadena dada de signos del lenguaje *L* bajo que condiciones esa cadena puede ser considerada correcta y por lo tanto ser tenida como una expresión del lenguaje en cuestión.

Mientras que no siempre los hablantes de los lenguajes naturales formulan explícitamente las reglas que rigen esos lenguajes, necesariamente deben formularse en los lenguajes formales. Las reglas que indican qué cosas serán tenidas por *fórmulas bien formadas* o *fórmulas*, serán tres.

La primer regla es que toda letra proposicional será considerada una fórmula.

La segunda indica que si algo es considerado fórmula, entonces la negación de ese algo también será una fórmula del lenguaje *L*.

La tercera regla señala que si dos cosas son fórmulas entonces la unión de ellas encerradas entre paréntesis y unidas a través de un conectivo binario, también será considerado una fórmula.

Digámoslo ahora de manera un poco más formalizada: Sea *For* el conjunto de las fórmulas del lenguaje *L*

1°) Toda *letra proposicional* $\subset$ For.

2°) Si $\alpha \in$ For entonces $\neg\alpha \in$ For.

3°) Si $\alpha, \beta \in$ For entonces $(\alpha * \beta) \in$ For, donde $* \in$ CB, siendo CB el conjunto de los conectivos binarios.

Por lo tanto, para formar correctamente las fórmulas en este cálculo, es preciso tener en cuenta los siguientes requisitos:

- El negador (en tanto que conectivo unario) se antepone tanto a fórmulas atómicas (una variable), como a fórmulas moleculares. Por ejemplo:

  $\neg$ p,
  $\neg$ (p v q)
  $\neg$ ((p v q) $\wedge$ (p $\wedge$ q))

- Las restantes conectivas unen dos fórmulas cualesquiera (esto es, dos variables proposicionales, dos fórmulas, una formula y una variable proposicional). Por ejemplo:

  (p v q),
  (p v q) $\wedge$ (p $\wedge$ q)
  ((p $\leftrightarrow$ q) $\rightarrow$ q)

Si bien una de las regla de formación de expresiones obliga a la utilización de los paréntesis para toda fórmula molecular, en el curso evitaremos aquellos paréntesis cuya omisión no genere problema de ambiguedad en la fórmula.

Reglas semánticas:

Definición de los conectivos:

La lógica proposicional se utiliza para determinar la validez de argumentos, es decir, los conectivos tratan de expresar ciertas formas típicas que el lenguaje natural utiliza para relacionar proposiciones. En tanto el cálculo proposicional es un lenguaje artificial, formal, completamente definido, en el se eliminan las *ambiguedades* expresivas del lenguaje natural (formas iguales de expresar relaciones diferentes entre enunciades), así como también se elimina la pluralidad de formas de expresar lo mismo mediante formas diferentes que posee el lenguaje natural.

Es necesario, también, resaltar que no ocurre que necesariamente a cada premisa le corresponda una letra enunciativa.

Por ejemplo, supongamos que tenemos el siguiente argumento:

Juan es mafioso
Si Juan es mafioso entonces lava dinero.
___
Juan lava dinero

$$\frac{\begin{array}{l} P \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}$$

Como vemos, la primer premisa ("Juan es mafioso") está representada por la letra "p". Sin embargo la segunda premisa ("Si Juan es mafioso entonces lava dinero") no está representada por una letra enunciativa sino por la estructura compleja "Si p entonces q". Si a cada premisa debiera corresponder una letra enunciativa diferente el argumento que estamos utilizando como ejemplificación hubiera debido escribirse:

p, q ~> s

Resulta evidente que entonces no hubiéramos podido representar la relación de implicación que podemos intuir en el argumento original y hubiera sido imposible mostrar que ese argumento es correcto en virtud de su estructura proposicional.

Las letras enunciativas representan proposiciones y no necesariamente premisas. Si bien una premisa es y debe ser considerada como una proposición, su estructura puede ser simple o compleja. Una premisa puede estar conformada por una única proposición o por una relación entre proposiciones. Podemos, por lo tanto, distinguir los dos tipos anteriormente mencionados: atómica y molecular.

Cualquier proposición atómica puede simbolizarse con una variable proposicional, y esta puede tomar uno de los dos posibles valores de verdad (verdadero o falso). Por ejemplo, sea la proposición atómica "hoy es martes" que puede simbolizarse por **p,** la misma puede ser o bien verdadera o bien falsa. El valor de verdad de tal proposición depende de si lo que ella afirma o niega se corresponde con la realidad o no. Recuerden que la lógica no tiene como objetivo determinar si una proposición atómica es verdadera o falsa, porque eso depende de las ciencias.

El valor de verdad de una proposición molecular dependerá del valor de las proposiciones atómicas que la constituyen más la conectiva que las vincula.

Para determinar el valor de verdad de una proposición molecular es necesario saber el valor de verdad que producen los conectivos al ser aplicados sobre las fórmulas, sobre los valores de verdad de las fórmulas.

Los conectivos son funciones que a partir de valores de verdad arrojan nuevos valores de verdad. Dichas funciones quedan expresadas en una *tabla* que permite realizar el cálculo. Dichas tablas reciben el valor de *tablas de definición* de un conectivo o también *tabla de verdad* de un conectivo.

Negación:

la *negación* , que es un concetivo unario, no es un conectivo que vincule dos variables proposicionales, sino que afecta el valor de verdad de lo que está a uno de los lados del signo, más precisamente lo que se ubica inmediatamente a la derecha. El "no" del lenguaje natural será representado por el signo "¬".

Así el enunciado: "Juan no estudia" se escribe en el lenguaje proposicional de la siguiente manera:

$\neg p$

La negación es la conectiva que convierte un enunciado verdadero en falso, y un enunciado falso en verdadero.

Tabla de verdad de la Negación:

p	**¬ p**
v	f
f	v

Conjunción:

a veces ponemos en *conjunción* ciertos enunciados, es decir los relacionamos de tal manera que concebimos que ambos ocurren a la vez. En ocasiones se encuentra reflejado en el lenguaje natural mediante el uso de la conjunción "y" o de la palabra "pero" como en los siguientes enunciados: "Juan se ríe mucho con los chistes y con los tiros de gracia", "Juan es un chupa sangre, pero como patrón es bueno". A veces también sirve una coma para hacerlo, como cuando damos una serie de características de un objeto "Juan es distraído, torpe, amarrete".

En el lenguaje del cálculo proposicional simbolizaremos la conjunción mediante el signo "$\wedge$". Podríamos representar ahora el enunciado que habla sobre el muy peculiar y desagradable sentido del humor de Juan de la siguiente manera:

$p \wedge q$

Allí, "p" correspondería por ejemplo al enunciado "Juan se ríe con los chistes" y "q" representaría al enunciado "Juan se ríe con los tiros de gracia". Idéntica sería la expresión para retratar al enunciado que intenta expresar que la condición de vida de Juan no influye negativamente sobre las condiciones laborales con sus empleados. Claro que es ese caso "p" y "q" representan diferentes enunciados que en el caso anterior.

La Conjunción es la conectiva que origina una proposición molecular que solo es verdadera si ambas proposiciones que la integran son verdaderas, y falsa en los otros casos.

Tabla de verdad de la Conjunción:

p	**q**	**p ∧ q**
v	v	**v**
f	v	**f**
v	f	**f**
f	f	**f**

Disyunción:

otra posibilidad que nuestro lenguaje proposicional retratará será la vinculación entre enunciados en términos de posibilidades alternativas. Utilizaremos en este lenguaje formal la llamada *disyunción inclusiva* y nos referiremos a ella simplemente como *disyunción*. En ella se postula una posible alternativa aunque no queda impedido el caso de que pasen ambas cosas a la vez. En el lenguaje natural se suele exponer esa relación mediante expresiones como "o", "y/o". En el lenguaje del cálculo proposicional se expresará mediante el signo "v". Pongamos como ejemplo el siguiente enunciado: "Juan o camina o come chicle". Más allá de la imposibilidad práctica de algunas personas para realizar ambas actividades el enunciado sólo intenta presentar una disyunción donde bien pueden ocurrir ambas cosas a la vez. La misma podría expresarse como:

p v q

La Disyunción es la conectiva que origina una proposición molecular que solo es falsa si ambas proposiciones que la integran son falsas, y verdadera en los otros casos.

Tabla de verdad de la Disyunción:

p	**q**	**p v q**
v	v	**v**
f	v	**v**
v	f	**v**
f	f	**f**

Condicional:

el conectivo llamado *condicional* permite expresar en el lenguaje formal la relación que se postula en el lenguaje natural con la expresión "Si ... entonces...". Efectivamente, como el nombre lo sugiere, un condicional no retrata sino una relación de condición en la que se pretende que si llegara a pasar una cierta cosa, entonces pasaría otra cierta cosa. Un ejemplo de expresiones de este tipo es el caso ya mencionado de "Si Pepe es vampiro entonces posee un oscuro castillo en Transilvania" Este conectivo será simbolizado con "$\rightarrow$". Lo que se encuentre a la izquierda del signo del condicional será llamado antecedente y lo que se ubique a la derecha será llamado consecuente. Ahora podremos reescribir esa expresión completamente en el lenguaje del cálculo proposicional y quedaría de la siguiente manera:

$p \rightarrow q$

Si bien esa relación de condición entre enunciados encuentra en el lenguaje natural su expresión paradigmática en la frase "Si ...entonces ...", hay que aclarar que el lenguaje natural tiene varias formas de expresar las mismas relaciones entre enunciados, debido a su plasticidad. Así, una simple "," permite expresar esa relación. Véase el siguiente ejemplo:

Si Pepe pusiera un hotel, no tendría que salir a buscar su alimento

El Condicional es el conectivo que origina una proposición molecular que solo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, siendo verdadera en los restantes casos.

Tabla de verdad del Condicional:

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
v	v	**v**
f	v	**f**
v	f	**v**
f	f	**v**

<u>Bicondicional</u>:

muchas veces estamos interesados en dejar claramente establecido que una cosa está tan estrechamente vinculada a otra que sólo ocurre una si ocurre la otra y lo mismo a la inversa. Esa relación es la llamada relación <u>*bicondicional*</u> y es muy usada en las matemáticas y en las disciplinas científicas y encuentra su formulación más clara en la expresión "...si y sólo si..." y a veces por la expresión "...sólo si...". En el lenguaje proposicional quedará simbolizada por la doble flecha "$\leftrightarrow$".

Un ejemplo de enunciado que presente esa relación bicondicional entre enunciados podría ser el siguiente: "Juan es vampiro si y sólo si muere al clavársele una estaca en el corazón". Ese enunciado, que tendría la equivocada consecuencia de clasificar a todos los seres cordados como vampiros, se expresaría en el lenguaje proposicional de la siguiente manera:

$$p \leftrightarrow q$$

Esta conectiva origina una proposición molecular que es verdadera cuando sus dos componentes tienen el mismo valor de verdad, y falsa si uno de sus componentes es verdadero y el otro falso.

Tabla de verdad del Bicondicional:

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
v	v	**v**
f	v	**f**
v	f	**f**
f	f	**v**

Resumen de las tablas de verdad de las conectivas:

Negación

p	**$\neg$ p**
v	f
f	v

Conjunción:

p	q	p ∧ q
v	v	**v**
f	v	**f**
v	f	**f**
f	f	**f**

Disyunción:

p	q	p v q
v	v	**v**
f	v	**v**
v	f	**v**
f	f	**f**

Condicional:

p	q	p → q
v	v	**v**
f	v	**f**
v	f	**v**
f	f	**v**

Bicondicional:

p	q	p ↔ q
v	v	**v**
f	v	**f**
v	f	**f**
f	f	**v**

Lenguaje y Metalenguaje:

Es necesario que nos detengamos un momento en dos niveles diferentes de retratar el lenguaje, pues en lo que sigue haremos uso de ellos, muchas veces sin las debidas aclaraciones de salto de nivel.

El enunciado "Juan es mafioso si y solo si lava dinero", se traduce al lenguaje del cálculo proposicional de la siguiente manera:

$p \leftrightarrow q$

Esa expresión corresponde a nuestro lenguaje. Esa expresión no es sino la forma que se emplearía en el lenguaje del cálculo proposicional para capturar la estructura del enunciado del lenguaje natural que proponía indicar cómo descubrir si Juan es realmente o no un mafioso. Podríamos aún preguntarnos cuál es la estructura general de esa forma expresable en el lenguaje proposicional. Podríamos responder que ese caso particular es sólo una instancia de una estructura enunciativa más general y que podríamos expresar así:

$A \leftrightarrow B$

No se necesita demasiada sagacidad para notar que "A" y "B" no pertenecen a nuestro lenguaje. Lo que nos preguntamos entonces excedía las posibilidades de ese lenguaje, pues preguntaba por una estructura general, inexpresable en nuestro lenguaje elaborado para retratar enunciados concretos. En este caso estamos hablando desde el metalenguaje, un lenguajes especial con el cual podemos dar cuenta de algunas propiedades de nuestro lenguaje.

Hablar desde el metalenguaje es hablar desde otro lugar, desde otro nivel de habla. El metalenguaje no necesita ser tan estructurado y reglamentado como nuestro lenguaje del cálculo proposicional y muchas veces puede sernos útil para referirnos a cualquier estructura posible del lenguaje, para mostrar ciertas propiedades generales del mismo. Es decir, en esa esquematización general de la estructura que expresa la vinculación del bicondicional "A" no corresponde a "p" ni a "q" (lo mismo vale para "B") Estas letras mayúsculas representan cualquier estructura enunciativa, sin importar su complejidad y no solamente enunciados atómicos.

Observemos la siguiente lista de estructuras argumentales expresadas en el lenguaje proposicional:

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \vee s)$

$((p \wedge s) \vee q) \leftrightarrow q)$

$((p \vee q) \rightarrow (r \vee s)) \leftrightarrow (p \wedge s))$

Cada una de esas estructuras puede, con toda justicia, ser considerada como una instancia particular de la forma más general que desde el metalenguaje hemos expresado como:

$$A \leftrightarrow B$$

No es necesario mucho esfuerzo para ver que hemos ejemplificado con estructuras simples del lenguaje *L* el uso de los conectivos, aunque bien puede realizarse sin mayor dificultad desde el metalenguaje.

Cuando nos adentremos en algunas formas del cálculo proposicional, necesitaremos hablar desde el metalenguaje pues nos interesa que quede claro que esas propiedades valen para cualquier instancia particular de una cierta forma enunciativa o argumental general.

Téngase presente que cada vez que hemos hablado o hablemos expresándonos sobre el lenguaje proposicional desde fuera del mismo, asistimos al empleo del metalenguaje para mostrar propiedades operativas del lenguaje, las cuales sólo se pueden considerar de manera general desde fuera.

Representación de la estructura argumental en el Lenguaje *L* – ejemplo

Retomemos un argumento que ya hemos visto: "*Si Juan es mafioso, entonces lava dinero. Juan es mafioso. Por lo tanto, Juan lava dinero*"

Si tratamos de representar ese argumento en el lenguaje *L*, según la representación "horizontal" nos quedaría lo siguiente:

$$p \rightarrow q,\ p \mathrel{\sim>} q$$

Más allá de nuestro intento es claro que esa expresión no forma parte de nuestro lenguaje. Para mostrarlo basta con ver si esa expresión no infringe ninguna de las reglas de formación. Veamos: "p" y "q" forman parte de nuestro lenguaje. Sin embargo es claro que la coma y el signo "~>" no forman parte de nuestro lenguaje

Recordemos que el signo “~>” representaba el “por lo tanto”, o el “entonces “ con el que se suele dar paso a la conclusión. Convirtamos nuestros dos signos problemáticos en palabras para que sea más claro el paso que daremos a continuación.

Si $p \rightarrow q$ y p entonces q

Ya hemos visto que la expresión “Si... entonces... “ puede expresarse mediante el condicional, en tanto que la expresión “y” se puede expresar mediante la conjunción. Por lo tanto una satisfactoria traducción de esa estructura argumental a nuestro lenguaje sería la siguiente.

$$p \rightarrow q \wedge p \rightarrow q$$

Nuevamente debemos introducir los paréntesis para evitar ambigüedades ya que se plantean varias posibilidades de lectura. Sin embargo hay una sola que representa el argumento que originalmente queremos retratar:

$$(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$$

No es difícil comprender que dicha representación en el lenguaje *L* de un argumento particular, no es sino una instancia particular de un esquema formal más general que podría representarse de la siguiente manera:

$$(((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B)$$

<u>Representación argumenta en *L* – procedimiento general</u>

Ahora que hemos llegado hasta aquí estamos en condiciones de presentar un procedimiento general para retratar argumentos en nuestro lenguaje formal. El procedimiento podría describirse mediante tres pasos.

Paso 1: Se identifican claramente, en el argumento original del lenguaje natural, los enunciados que conforman el argumento y se los distingue según tengan la función de premisas o de conclusión.

Paso 2: Se representa cada uno de los enunciados del argumento (sean premisas o conclusión) en el lenguaje formal *L* haciendo uso de todos los recursos expresivos que fueran necesarios dentro de dicho lenguaje.

Paso 3: Se construye un condicional el cual tendrá como antecedente la conjunción de todas las premisas representadas en el paso 2 y que tendrá por consecuente el enunciado representado como conclusión en el paso 2.

Veamos el siguiente ejemplo:

Si Juan le tiene temor a las alturas, entonces volará muy bajo. Si vuela con los ojos cerrados, corre peligro de estrellarse contra una pared. Es claro que si corre riesgo de estrellarse contra una pared y además vuela bajo, entonces es candidato a tener que andar con un yeso. Por lo tanto, si le tiene miedo a las alturas y vuela con los ojos cerrados es candidato a tener que andar con un yeso.

Primer paso: Identifiquemos primero los enunciados distinguiendo premisas y conclusión:

Pr_1: Si le tiene temor a las alturas, entonces volará muy bajo.

Pr_2: Si vuela con los ojos cerrados, corre peligro de estrellarse contra una pared.

Pr_3: Si corre peligro de estrellarse contra una pared y además vuela bajo, entonces es candidato a tener que andar con un yeso.

Con: Si le tiene miedo a las alturas y vuela con los ojos cerrados es candidato a tener que andar con un yeso.

Segundo paso: Ahora debemos traducir esos enunciados a nuestro lenguaje del cálculo proposicional. Para comenzar le asignaremos una letra enunciativa diferente a cada enunciado atómico diferente. Debido a que todas las proposiciones refieren a Pepe, nos tomaremos la libertad de no escribir su nombre, pero es claro que si hubiera dos o más personajes distintos involucrados en el argumento, es necesario para diferenciar los enunciados:

p: tiene miedo a las alturas

q: vuela bajo

r: vuela con los ojos cerrados

s: corre peligro de estrellarse contra una pared t: es candidato a tener que andar con un yeso

Una vez hecho esto debemos encontrar una adecuada traducción para cada uno de los enunciados que hemos identificado en el primer paso:

Pr_1: $(p \rightarrow q)$

Pr_2: $(r \rightarrow s)$

Pr_3: $((q \wedge s) \rightarrow t)$

Con: $((p \wedge r) \rightarrow t)$

Tercer paso: Ahora estamos en condiciones de escribir el condicional que retratará la forma del argumento propuesto a consideración. Aunque pueda resultar un tanto extenso escribiremos poco a poco ese condicional. Primero escribiremos la fórmula que resulta de poner en conjunción a las dos premisas. Después escribiremos otra fórmula poniendo a lo anterior en conjunción con la tercer premisa. Por último conectaremos mediante un condicional a la fórmula anterior con la conclusión. Aunque puede resultar un tanto más tedioso, el objetivo de hacerlo tan minuciosamente es que se comprenda bien la colocación de los paréntesis y no surjan problemas con la lectura de las fórmulas más adelante. Comencemos pues:

$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s))$

$(((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge ((q \wedge s) \rightarrow t))$

$((((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge ((q \wedge s) \rightarrow t)) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow t))$

Representación argumental

Hemos logrado retratar con los recursos de nuestro lenguaje *L* la estructura argumental. Mostramos la capacidad expresiva de dicho lenguaje, las posibilidades de representar en términos formales la estructura de los argumentos. Lo que interesa es realizar el control inferencial del argumento. Tras la representación de argumentos debemos abocarnos a la evaluación de los mismos. Es decir, tras ver los recursos del lenguaje del cálculo proposicional debemos ver el cálculo proposicional en funcionamiento. Hay varios modelos para evaluar argumentos. Entre ellos encontramos tablas semánticas, deducción natural y tablas de verdad. Desarrollaremos este último.

Conociendo el valor de verdad de las cinco conectivas se puede realizar la tabla de verdad de cualquier fórmula de la siguiente manera.

Supongamos la siguiente fórmula: $((p \rightarrow q) \wedge (p\rightarrow q))$

1. Se asignan valores de verdad a todas las variables proposicionales que aparezcan en la fórmula, en nuestro ejemplo aparecen dos variables proposicionales, cada una de ellas solo puede tener dos valores de verdad, por lo que tenemos 4 combinaciones posibles (2^2). La fórmula general es 2^n, en la que ^{n} representa el número de variables proposicionales diferentes que aparecen en la fórmula. Para garantizar que en la tabla aparezcan todas las combinaciones posibles de sus valores de verdad, conviene asignar los valores del siguiente modo: a la primera variable proposicional valores de verdad de uno en uno, (un verdadero-un falso, un verdadero...), a la siguiente variable de dos en dos (dos verdaderos, dos falsos...), y así sucesivamente.
2. Se realizan las tablas de verdad de las fórmulas cuyas conectivas sean menos dominantes.

Como ocurre que a veces no aparecen estos símbolos auxiliares en una fórmula, conviene tener en cuenta que hay una jerarquía de dominancia entre las conectivas:

$\leftrightarrow$ domina en cualquier fórmula

$\rightarrow$ domina a $\wedge$ **, v**

$\wedge$ **, v** tienen la misma fuerza

$\neg$ domina a todos cuando afecta a la fórmula

3. Se realiza la tabla de verdad de la conectiva dominante y este es el valor de verdad de la fórmula en cuestión.

Veamos como funciona:

((p	→	q)	∧	(p	→	q))
v	**v**	v	**v**	v	**v**	v
f	**v**	v	**v**	f	**v**	v
v	**f**	f	**f**	v	**f**	f
f	**v**	f	**v**	f	**v**	f

Como visualizan en la tabla de verdad de la fórmula antes planteada, (en negro) se encuentra la asignación de valores. Luego se realizó las tablas de verdad de las conectivas menos dominantes, en este caso los condicionales (en verde); y por último la tabla de verdad de la conectiva principal, que en este caso es la conjunción (en rojo).

Análisis de una tabla de verdad

Al realizar una tabla de verdad de una fórmula, podemos encontrar tres tipos de resultado (es decir, mirando la columna final donde se ha resuelto el valor de verdad de la fórmula para cada combinación de valores de verdad de sus componentes) :

1. sus valores de verdad son en todos los casos verdadero: tautología
2. sus valores de verdad son en todos los casos falso: contradicción
3. sus valores de verdad son en algunos casos verdaderos y en otros falsos: contingencia

En el primer caso tenemos una tautología o ley lógica. Es una fórmula que resulta siempre verdadera con independencia del contenido de la misma, por lo que es formalmente verdadera.

En el segundo caso tenemos una contradicción, fórmula siempre falsa independientemente de los valores de verdad de las variables proposicionales que la constituyen. Es falsa por su propia forma.

En el tercer caso tenemos una fórmula indeterminada. En esta fórmula, su verdad o falsedad depende de los valores de verdad de las variables proposicionales que la constituyen. A estas fórmulas también se les denomina consistentes.

Estas tablas nos permiten detectar que fórmulas son verdades lógicas, cuáles son contradictorias y cuáles son contingentes. También nos permiten averiguar si una fórmula se sigue de otra, es decir, si puede deducirse de ella, por lo que, las tablas de verdad nos permiten determinar la validez de un argumento.

Supongamos nuevamente este ejemplo: *Si Juan es mafioso, entonces lava dinero. Juan es mafioso. Por lo tanto, Juan lava dinero".* Su forma lógica sería:

$(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$

Como ya hemos visto, con otro ejemplo, se toman las premisas y se las une mediante una conjunción que conformarán el antecedente de un condicional; luego las unimos a la conclusión mediante el condicional, esta conclusión conformará el consecuente de tal condicional. Luego de haber armado tal condicional se lo somete al análisis veritativo funcional, y si el resultado obtenido es una tautología podemos decir que tal argumento es válido.

La tabla de verdad correspondiente sería:

(((p	**→**	**q)**	**∧**	**p)**	**→**	**q)**
v	**v**	v	**v**	v	**v**	v
f	**v**	v	**f**	f	**v**	v
v	**f**	f	**f**	v	**v**	f
f	**v**	f	**f**	f	**v**	f

Como podemos observar en la fórmula en cuestión la conectiva principal es el segundo condicional (resultado en azul), por lo que él nos da el resultado final que en este caso es una tautología, por lo que podemos decir que es una ley lógica, porque es siempre verdadera. Al realizar la tabla vemos que q, se sigue de p→q, y de p; o sea la conclusión se sigue de las premisas y el argumento es correcto.

Reglas de transformación de fórmulas y su aplicación

Otra forma de comprobar si q, se sigue de (p→q) y de p, consiste en descomponer (p→q) ∧ p, y recomponer con sus elementos q. Eso es posible utilizando las reglas de transformación de fórmulas o reglas de inferencia de la lógica proposicional, que nos permiten saber qué transformaciones dan lugar a fórmulas válidas dentro del sistema.

Las reglas de transformación se formulan en lenguaje no formal, junto a la cual se indica el esquema de inferencia mediante el cual se expresa esta.

Cada una de estas reglas puede ser considerada la expresión de una ley lógica, por lo que desarrollada su tabla de verdad veremos que son tautologías.

Una deducción formal consiste en eliminar conectivas e introducir otras de manera que se puedan descomponer y componer fórmulas válidas dentro del sistema.

Con este procedimiento estamos frente al modelo denominado deducción natural, que consiste en una secuencia finita de fórmulas en la que cada una de ellas se obtiene de las anteriores mediante la aplicación de una regla de transformación. La última fórmula de dicha secuencia se llama conclusión.

No desarrollaremos dicho modelo, solo vamos a presentar algunas de las reglas de transformación de la lógica de enunciados.

REGLA	**ESQUEMA**
Doble Negación: dad una premisa cualquiera, puede concluirse su doble negación y a la inversa.	$\dfrac{A}{\neg\neg A}$
Simplificación: si tenemos como premisa una conjunción, puede deducirse por separado cualquiera de las proposiciones que la forman.	$\dfrac{A \land B}{A}$ $\qquad$ $\dfrac{A \land B}{B}$
Conjunción: si tenemos como premisas dos proposiciones cualesquiera, puede deducirse la conjunción de ambas.	$\dfrac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{A \land B}$
Silogismo disyuntivo: si tenemos como premisas una disyunción y la negación de uno de sus miembros, podemos deducir la afirmación del otro miembro.	$\dfrac{\begin{array}{c}A\lor B\\ \neg A\end{array}}{B}$ $\qquad$ $\dfrac{\begin{array}{c}A\lor B\\ \neg B\end{array}}{A}$
Adición: si tenemos como premisa una fórmula cualquiera, puede deducirse la disyunción de esta misma fórmula con otra cualquiera.	$\dfrac{A}{A\lor B}$
Conmutativa: si tenemos una conjunción, se puede deducir de ella otra conjunción con sus miembros intercambiados. Lo mismo vale para la disyunción.	$\dfrac{A \land B}{B \land A}$ $\qquad$ $\dfrac{A\lor B}{B\lor A}$

Asociativa: si tenemos una conjunción, uno de cuyos miembros sea, a su vez, conjunción, puede deducirse otra fórmula en la que las conjunciones se agrupen de distinto modo. Lo mismo vale para una disyunción.	$\dfrac{\underline{A \wedge (B \wedge C)}}{(A \wedge B) \wedge C}$ $\dfrac{\underline{A \vee (B \vee C)}}{(A \vee B) \vee C}$
Distributiva: de la conjunción de una fórmula con otra disyuntiva puede deducirse la disyunción de los fórmulas conjuntivas. De la disyunción de una fórmula con otra conjuntiva puede deducirse la conjunción de dos fórmulas disyuntivas.	$\dfrac{\underline{A \wedge (B \vee C)}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$ $\dfrac{\underline{A \vee (B \wedge C)}}{(A \vee B) \vee (A \vee C)}$
Modus Ponens: si tenemos como premisas una formula Condicional y su antecedente, podremos deducir su consecuente.	$\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}$
Modus Tollens: si tenemos como premisas una fórmula condicional y la negación de su consecuente, podemos deducir la negación de su antecedente.	$\dfrac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$

Dado todo lo anteriormente dicho no será nada difícil para el alumno construir una fórmula que pueda expresar cada una de estas reglas de transformación.

Los casos en que hay dos líneas rectas, en vez de una, corresponden a casos en los que la fórmula puede expresarse bajo la forma de un Bicondicional. En los otros casos deberá usarse el Condicional como el conectivo que caracterice la fórmula.